Regra de Três simples e composta

Grandezas Proporcionais

Definição: Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou contado.

Exemplo: Peso, comprimento, custo, tempo.

Exercício resolvido: Um trem a 60 km/h demora 2 horas para percorrer uma distância de 120 km.

a) Qual a distância percorrida em 4 horas?

1ª Grandeza	2ª Grandeza
Tempo	**Distância**
2	120
4	x

Se aumentarmos as horas aumentamos a distância percorrida, dizemos que as duas grandezas são ***diretamente proporcionais.*** Para resolvermos o problema, basta montarmos as proporções e resolvemos a equação:

$$\frac{2}{4} = \frac{120}{x}$$

b) A 90 km/h quanto tempo será necessário para percorrer 120 km?

Tempo	**Velocidade**
2	60
x	90

Se aumentarmos a velocidade diminuímos o tempo necessário para percorrermos um distância fixa. Dizemos que as duas grandezas são ***inversamente proporcionais.*** Para resolvermos o problema, basta montarmos as proporções, invertendo a última,e resolver a equação:

$$\frac{2}{x} = \frac{90}{60}$$

Regra de três simples e composta

Definição: Regra de três é o procedimento para resolver um problema que envolva grandezas relacionadas onde determinamos por proporção o valor de uma destas, conhecendo a relação desta proporção com a proporção das demais grandezas. Este procedimento chama-se ***regra de três simples*** quando temos apenas 2 grandezas e do contrário chama-***se regra de três composta***, ou seja, quando temos mais de 2 grandezas.

Procedimento:

1ª etapa - Identificar as grandezas e a relação entre elas (diretamente ou inversamente proporcionais);
2ª etapa - Montar a Tabela com as proporções;
3ª etapa - Montar e resolver as proporções.

Exercício 1 - Para descarregar 10 vagões de trem em uma hora precisamos de 5 funcionários.

a) Quanto tempo os funcionário demorarão em descarregar 60 vagões?
b) Quantos funcionários serão necessários para descarregar os 10 vagões em meia hora?
c) Quantos funcionários serão necessários para descarregar os 120 vagões em 6 Horas?

Solução 1 a)

1ª Etapa:

Tempo	**Nº. de Vagões**
1	10
x	60

2ª Etapa: Tempo XNº. vagões => diretamente proporcionais

3ª Etapa:

Solução 1 b)

1ª Etapa:

Nº. de funcionários	**Tempo**
5	1
X	1/2

2ª Etapa: Nº. de funcionários XTempo => inversamente proporcionais

3ª Etapa:

Solução 1 c)

1ª Etapa:

1ª Grandeza	2ª Grandeza	3ª Grandeza
Tempo	**Nº. de funcionários**	**Nº. de vagões**
1	5	10
6	x	120

2ª Etapa: Tempo X Nº. de funcionários => inversamente proporcionais
Nº. Vagões X Nº. de funcionários => diretamente proporcionais

3ª Etapa:

Exercício 2 **–** O investimento de R$ 10.000,00 na melhoria da logística de uma empresa gera uma economia de R$2.000,00.

a) Qual a economia se investirmos R$ 4.000,00?
b) Para termos uma economia de R$ 2.500,00 quanto devemos investir?

Exercício 4 **–** Se 21 pintores, trabalhando 8 horas por dia, pintam um edifício em 6 dias. Nas mesmas condições, quantos dias serão necessários para que 9 pintores, trabalhando 7 horas por dia, pintem o mesmo edifício?

Exercício 5 **–** Se 10 máquinas, funcionando 6 horas por dia, durante 60 dias, produzem 90 000 peças, em quantos dias, 12 dessas mesmas máquinas, funcionando 8 horas por dia, produzirão 192 000 peças?

Percentagem

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Percentagem ou **porcentagem** é uma medida de razão com base 100. É um modo de expressar uma proporção ou uma relação entre 2 valores (um é a parte e o outro é o inteiro) a partir de uma fração cujo denominador é 100.

Significado

Dizer que algo (chamaremos de y) é "70%" de x (lê-se: "y é setenta por cento de x"), significa dizer que y é equivalente a 70 elementos em um conjunto universo de 100 elementos (representando x, que pode ter qualquer valor), ou seja, que a razão é a divisão:

Ou seja, a 0,7ª parte de 1, 1 representando o valor inteiro da fração, no caso, *x*.

Em determinados casos, o valor máximo de uma percentagem é obrigatoriamente de 100%, tal qual ocorre na umidade relativa do ar. Em outros, contudo, o valor pode ultrapassar essa marca, como quando se refere a uma fração maior que o valor (500% de x é igual a 5 vezes x).

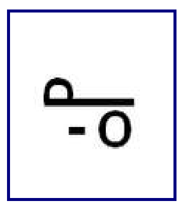
Símbolo

Muitos acreditam que o símbolo "**%**" teria evoluído a partir da expressão matemática

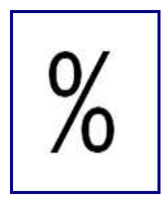
$$\frac{x}{100}.$$

Porém, alguns documentos antigos altamente sugerem que o **%** evoluiu a partir da escrita da expressão latina "*per centum*", sendo conhecido em seu formato atual desde meados do século XVII. Apesar do nome latino, a criação do conceito de representar valores em relação a uma centena é atribuída aos gregos.

Símbolo no século XV



Símbolo no século XVII



Símbolo a partir do século XVIII

Segundo o historiador David Eugene Smith, o símbolo seria originalmente escrito "per 100" ou "per c". Smith estudou um manuscrito anónimo de 1425, contendo um círculo por cima do "c". Com o tempo a palavra "per" acabaria por desaparecer e o "c" teria evoluído para um segundo círculo.

Ponto percentual

Ponto percentual é a diferença (em valor absoluto) em um valor percentual. Ele foi criado para evitar confusões em percentuais de percentual.

É importante ter em mente a distinção entre "percentual" e "ponto percentual". Quando, por exemplo, uma taxa de juros é aumentada de 10% para 15%, pode-se dizer que houve um aumento de 50%, isto é, que o percentual do reajuste foi de 50%. Um uso muito comum porém errôneo é falar que a taxa aumentou 5%. Note que no exemplo os juros que aumentaram 5%, não a taxa de juros. Para evitar esta confusão foi criado *ponto percentual*, que é a diferença em termos absolutos entre duas percentagens. No exemplo citado, pode-se corretamente falar que a taxa foi aumentada em 5 pontos percentuais.

Conceitos básicos

Quando você vê em uma propaganda: "Compre uma televisão à vista por R$1000,00 ou a prazo por 5 parcelas de R$260,00" Você, claro, responde: "A prazo, pois prefiro pagar parcelado, em poucas vezes por mês, e em apenas 5 meses eu acabo de pagar."

Mas você esqueceu de pensar em um "detalhe": 5 parcelas de R$260,00 dá o equivalente a R$1300,00 que é 30% a mais do que a oferta á vista (R$1000,00). São em situações como essas que você percebe como a Matemática Financeira é uma ferramenta útil na análise de algumas alternativas de investimentos ou financiamentos de bens de consumo. Ela consiste em empregar procedimentos matemáticos para simplificar a operação financeira.

C	**Capital**
n	**número de períodos**
j	**juros simples decorridos n períodos**
J	**juros compostos decorridos n períodos**
r	**taxa percentual de juros**
i	**taxa unitária de juros (i = r / 100)**
M	**Montante de capitalização simples**
S	**Montante de capitalização composta**

Juros

Do ponto de vista do conceito econômico, pode ser definido como a remuneração do banqueiro. Analogamente existem ainda o lucro (remuneração dos empresários e acionistas) e aluguéis (remuneração dos proprietários de bens imóveis alugados).

História

Documentos históricos redigidos pela civilização Suméria, por volta de 3000 a.C., revelam que o mundo antigo desenvolveu um sistema formalizado de crédito baseado em dois principais produtos, o grão e a prata. Antes de existirem as moedas, o empréstimo de metal era feito baseado em seu peso. Arqueólogos descobriram pedaços de metais que foram usados no comércio nas civilizações de Tróia, Babilônia, Egito e Pérsia. Antes do empréstimo de dinheiro ser desenvolvido, o empréstimo de cereal e de prata facilitava a dinâmica do comércio.

Teorias que explicam o fenômeno dos juros

Existem diversas teorias que tentam explicar porque os juros existem. Uma delas é a teoria da escola austríaca, primeiramente desenvolvida por Eugen von Boehm-Bawerk. Ela afirma que os juros existem por causa da manifestação das preferências temporais dos consumidores, já que as pessoas preferem consumir no presente do que no futuro. Juro é uma remuneração ou taxa cobrada sobre algum recurso emprestado. Ele pode ser cobrado de duas formas: simples e composta.

Regime	Processo de funcionamento
Simples	**Somente o principal rende juros.**
Compostos	**Após cada período, os juros são incorporados ao Capital, proporcionando juros sobre juros.**

Juros simples

O regime de juros será **simples** quando o percentual de juros incidir apenas sobre o valor principal. Sobre os juros gerados a cada período não incidirão novos juros. Valor Principal ou simplesmente principal é o valor inicial emprestado ou aplicado, antes de somarmos os juros. Transformando em fórmula temos:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

Onde:

J = juros C = capital i = taxa de juros n = número de períodos

Exemplo: Temos uma dívida de R$ 1000,00 que deve ser paga com juros de 8% a.m. pelo regime de juros simples e devemos pagá-la em 2 meses.

Os juros que pagarei serão: J = 1000 x 0.08 x 2 = 160

Taxas equivalentes

Duas taxas de juros são ***equivalentes***, se aplicadas ao mesmo capital durante o mesmo período de tempo, produzem o mesmo juros.

Exemplo: A aplicação de R$1.000,00 à taxa de 10% ao mês durante 3 meses equivale a uma única aplicação com a taxa de 33,1% ao trimestre.

Exercício: Calcule a taxa percentual diária, mensal e semestral equivalente a 30% ao ano.

Exercício: Calcular os juros simples obtidos por um capital C=1.250,00

a) durante 4 anos à taxa de 14% ao ano são dados por:
b) durante 4 anos à taxa de 14% ao ano são dados por:
c) durante 4 anos (48 meses) à taxa de 2% ao mês são dados por:
d) durante os 6 primeiros meses do ano de 1999 (181 dias), à taxa de 0,2% ao dia, são dados por:

Montante Simples

Montante é a soma do Capital com os juros. O montante também é conhecido como Valor Futuro. Em língua inglesa, usa-se Future Value, indicado nas calculadoras financeiras pela tecla FV. O montante é dado por uma das fórmulas:

$$M = C + j = C(1 + i\,n)$$

Exemplo: Qual é o valor dos juros simples pagos à taxa i=100% ao ano se o capital é C=R$1.000,00 e a dívida foi contraída no dia 10 de janeiro, sendo que deverá ser paga no dia 12 de abril do mesmo ano?

Contagem do tempo:

Período	Número de dias
De 10/01 até 31/01	21 dias
De 01/02 até 28/02	28 dias
De 01/03 até 31/03	31 dias
De 01/04 até 12/04	12 dias
Total	92 dias

Fórmula para o cálculo dos juros exatos:

$$j = C\,[(r / 365) / 100]\,n$$

Cálculo:

$$j = 1000\times[(100/365)/100]\times 92 = 252{,}05$$

Exercícios:

1) Se a taxa de uma aplicação é de 150% ao ano, quantos meses serão necessários para dobrar um capital aplicado através de capitalização simples?
2) Calcule o montante resultante da aplicação de R$70.000,00 à taxa de 10,5% a.a. durante 145 dias.
3) Calcular os juros simples de R$ 1200,00 a 13 % a.t. por 4 meses e 15 dias.
4) Calcular os juros simples produzidos por R$40.000,00, aplicados à taxa de 36% a.a., durante 125 dias.
5) Qual o capital que aplicado a juros simples de 1,2% a.m. rende R$3.500,00 de juros em 75 dias?

Gabarito: 1) 8 meses – 2) R$ 72.960,42 - 3) R$ 234,00 - 4) R$ 5000,00 - 5) R$ 116.666,67

Juros compostos

No regime de juros compostos os juros de cada período são somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. Os juros são capitalizados e, conseqüentemente, rendem juros.

Exemplo: Considere que um investidor tivesse aplicado $1.000,00 no Banco XYZ, pelo prazo de quatro anos, com uma taxa de juros de 8 % ao ano, no regime de juros compostos. Qual o valor do saldo credor desse investidor no Banco XYZ no final de cada um dos quatro anos da operação?

Ano	Saldo no início do ano	Juros no início do ano	Saldo no final do ano, antes do pagamento	Pagamento do ano	Saldo no final do ano após o pagamento
1	1.000,00	8% x 1.000,00 = 80,00	1.080,00	0,00	1.080,00
2	1.080,00	8% x 1,080,00 = 86,40	1.166,40	0,00	1.166,40
3	1.166,40	8% x 1.166,40 = 93,31	1.259,71	0,00	1.259,71
4	1.259,71	8% x 1.259,71 = 100,78	1.360,49	1.360,49	0,00

Tabela 1: Crescimento de $1.000,00 a juros compostos de 8% a.a.

Observações:

- o rendimento é maior a juros compostos do que a juros simples;
- o montante resultante, S, da aplicação de um capital C, durante n períodos, com taxa de juros, i, por período, no regime de juros compostos, é dado pela expressão:

$$S = C(1 + i)^n$$

- enquanto pelo regime de juros simples:

$$M = C(1 + in)$$

Valor atual e valor nominal

O montante de um capital (S) aplicado a data zero, à taxa de juros compostos (i), após n períodos, conforme já mostrado, é dado por:

$$S = C(1 + i)^n$$

O **valor atual** corresponde ao valor da aplicação em uma data inferior à data do vencimento. O**valor nominal** é o valor do título na data do seu vencimento. Vejamos estes conceitos aplicados ao regime de juros compostos: seja o montante dado (FV_n), queremos saber qual é o valor atual do compromisso na data zero.

Sejam:

- V = valor atual na data zero
- N = valor nominal n a data zero (FV_n)

$$N = V(1 + i)^n \quad \Rightarrow \quad V = \frac{N}{(1 + i)^n}$$

Deve ficar claro que o valor atual pode ser calculado em qualquer data focal inferior à do montante, não precisando ser necessariamente a data zero que utilizamos no exemplo acima. Constata-se que o cálculo do valor atual é apenas uma operação inversa do cálculo do montante. Nestas condições, o valor atual, aplicado à taxa de juros compostos contratada (i), da data do valor atual até a data do vencimento, reproduz o valor nominal. No Direito os juros está previsto no Dec. 22.626/1933 denominado Lei de Usura. A taxa de juro é chamado custo do dinheiro, o que é cobrado para emprestá-lo, basicamente. Segundo a legislação brasileira, é vedado e será punido nos termos da lei, estipular em quaisquer contratos taxas de juros superiores ao dobro da taxa legal.

Existem algumas variações da fórmula do Montante Composto, que estão apresentadas abaixo:

$S = P(1 + i)^n$	$n = \dfrac{\log(S) - \log(P)}{\log(1+i)}$
$P = S(1+i)^{-n}$	$i = \sqrt[n]{\dfrac{S}{P}} - 1$

Uma variação da fórmula de Montante composto é usada na obtenção do capital C de um capital futuro conhecido S.

$$\mathbf{C=S(1+i)^{-n}}$$

Cálculo de juros Compostos

$$\mathbf{J = C\,[(1+i)^n-1]}$$

Exemplo: Qual é o valor dos juros compostos pagos à taxa i=100% ao ano se o Principal é R$1.000,00 e a dívida foi contraída no dia 10/01/94 e deverá ser paga em 12/04/94?

Solução: A contagem dos dias corresponde a d=92 dias.

Dúvida: Qual será a fórmula para juros compostos quando a taxa é anual e o período está indicado em uma unidade diferente de 1 ano? A idéia é transformar 92 dias em unidades anuais para obter:

n = 92/365 de 1 ano =~ 0,252055 = 1/4 ano
Principal: P=1000; Taxa anual: i=100/100=1. A fórmula empregada é:

$$\mathbf{J = C\,[(1+i)^n-1]}$$

Solução:

$J=1000[(1+1)^{1/4}-1]=1000(1,189207-1)=189,21$

Taxas

Taxa é um índice numérico relativo cobrado sobre um capital para a realização de alguma operação financeira.

Taxas: (Matemática Financeira, Introdução ao Cap.6, José Dutra Vieira Sobrinho: "No mercado financeiro brasileiro, mesmo entre os técnicos e executivos, reina muita confusão quanto aos conceitos de taxas de juros principalmente no que se refere às taxas nominal, efetiva e real. O desconhecimento generalizado desses conceitos tem dificultado o fechamento de negócios pela consequente falta de entendimento entre as partes. Dentro dos programas dos diversos cursos de Matemática Financeira existe uma verdadeira 'poluição' de taxas de juros."

Não importando se a capitalização é simples ou composta, existem três tipos principais de taxas:

Taxa Nominal: A taxa Nominal é quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital não coincide com aquele a que a taxa está referida.

Exemplos:

1. 1200% ao ano com capitalização mensal.
2. 450% ao semestre com capitalização mensal.
3. 300% ao ano com capitalização trimestral.

Taxa Efetiva: A taxa Efetiva é quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital coincide com aquele a que a taxa está referida.

Exemplos:

1. 120% ao mês com capitalização mensal.
2. 450% ao semestre com capitalização semestral.
3. 1300% ao ano com capitalização anual.

Taxa Real: Taxa Real é a taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período da operação.

Conexão entre as taxas real, efetiva e de inflação: A taxa Real não é a diferença entre a taxa efetiva e a taxa da inflação. Na realidade, existe uma ligação íntima entre as três taxas, dadas por:

$$1+i_{efetiva} = (1+i_{real})\,(1+i_{inflação})$$

Exemplo: Se a taxa de inflação mensal foi de 30% e um valor aplicado no início do mês produziu um rendimento global de 32,6% sobre o valor aplicado, então o resultado é igual a 1,326 sobre cada 1 unidade monetária aplicada. Assim, a variação real no final deste mês, será definida por:

$$v_{real} = 1 + i_{real}$$

que pode ser calculada por:

$$v_{real} = \text{resultado} / (1 + i_{inflação})$$

isto é:

$$v_{real} = 1{,}326 / 1{,}3 = 1{,}02$$

o que significa que a taxa real no período, foi de:

$$i_{real} = 2\%$$

Aplicação em caderneta de poupança: Se o governo anuncia que a Caderneta de Poupança proporciona um rendimento real de 0,5% ao mês (=0,005), significa que o seu dinheiro deve ser corrigido pela taxa da inflação $i_{inflação}$, isto é, deve ser multiplicado por $1 + i_{inflação}$ e depois multiplicado por 1+0,5%=1,005.

Exemplo: Se uma pessoa possuia numa caderneta de poupança o valor de CR$ 670.890,45 no dia 30/04/93 e a taxa da inflação desde esta data até 30/05/93 foi de 35,64% entao ele terá em sua conta no dia 30/05/93, o valor de:

$$V = 670.890,45 \times 1,3564 \times 1,005 = 914.545,77$$

Taxas equivalentes

Exemplo: A aplicação de R$1.000,00 à taxa de 10% ao mês durante 3 meses equivale a uma única aplicação com a taxa de 33,1% ao trimestre.

Tomando P=1.000,00; i_1=0,1 ao mês e n_1=3 meses, seguirá pela fórmula do Montante composto, que :

$$S_1=P(1+i_1)^3=1000(1+0,1)^3=1000.(1,1)^3=1331,00$$

Tomando P=1.000,00; i_2=33,1% ao trimestre e n_2=1 trimestre e usando a fórmula do Montante composto, teremos:

$$S_2=C(1+i_2)^1=1000(1+0,331)=1331,00$$

Logo $S_1=S_2$ e a taxa de 33,1% ao trimestre é equivalente à taxa capitalizada de 10% ao mês no mesmo trimestre.

Observação sobre taxas equivalentes: Ao afirmar que a taxa nominal de uma aplicação é de 300% ao ano capitalizada mensalmente, estamos entendemos que a taxa é de 25% ao mês e que está sendo aplicada mês a mês, porque:

$$i = 300/12 = 25$$

Analogamente, temos que a taxa nominal de 300% ao ano corresponde a uma taxa de 75% ao trimestre, aplicada a cada trimestre, porque:

$$i = 300/4 = 75$$

É evidente que estas taxas não são taxas efetivas.

Cálculos de taxas equivalentes: Como vimos, taxas equivalentes são aquelas obtidas por diferentes processos de capitalização de um mesmo Principal P para obter um mesmo montante S.

Consideraremos i_a uma taxa ao ano e i_p uma taxa ao período p, sendo que este período poderá ser: 1 semestre, 1 quadrimestre, 1 trimestre, 1 mês, 1 quinzena, 1 dia ou outro que se deseje. Deve ficar claro que tomamos 1 ano como o período integral e que o número de vezes que cada período parcial ocorre em 1 ano é indicado por Np.

Exemplo: 1 ano = 2 semestres = 3 quadrimestres = 4 trimestres = 12 meses = 24 quinzenas = 360 dias.

A fórmula básica que fornece a equivalência entre duas taxas é:

$$\mathbf{1 + i_a = (1+i_p)^{Np}}$$

onde

i_a	**taxa anual**
i_p	**taxa ao período**
Np	**número de vezes em 1 ano**

Exercícios

1) Qual a taxa anual efetiva que permite a duplicação de um capital no prazo de 42 meses?
2) Na compra de um Bem cujo valor à vista é de R$ 140,00, deve-se pagar uma entrada mais duas prestações de R$ 80,00 no fim dos próximos 2 meses. Considerando uma taxa de juros de 20% am, qual o valor da

entrada?

3) Por um equipamento de R$ 360.000,00 paga-se uma entrada de 20% mais dois pagamentos mensais consecutivos. Se o primeiro pagamento for de R$ 180.000,00 e a taxa de juros efetiva aplicada, de 10% am, calcular o valor do segundo pagamento.
4) Um capital de R$ 50.000,00 rendeu R$ 1.000,00 em um determinado prazo. Se o prazo fosse dois meses maior, o rendimento aumentaria em R$ 2.060,40. Calcular a taxa de juros efetiva ao mês ganha pela aplicação e o prazo em meses.
5) Dois capitais foram aplicados durante 2 anos, o primeiro a juros efetivos de 2% am e o segundo, a 1,5 am. O primeiro capital é R$ 10.000,00 maior que o segundo e seu rendimento excedeu em R$ 6.700,00 o rendimento do segundo capital. Calcular o valor de cada um dos capitais.
6) Um certo capital após 4 meses transformou-se em R$ 850,85. Esse capital, diminuído dos juros ganhos nesse prazo, reduz-se a R$ 549,15. Calcular o capital e a taxa de juros efetiva ao mês ganha na aplicação.
7) Um capital foi aplicado a juros efetivos de 30% aa. Após 3 anos, resgatou-se a metade dos juros ganhos e, logo depois, o resto do montante foi reaplicado à taxa efetiva de 32% aa, obtendo-se um rendimento de R$ 102,30 no prazo de 1 ano. Calcular o valor do capital inicialmente aplicado.
8) Qual a taxa anual efetiva que permite a duplicação de um capital no prazo de 42 meses?
9) Na compra de um Bem cujo valor à vista é de R$ 140,00, deve-se pagar uma entrada mais duas prestações de R$ 80,00 no fim dos próximos 2 meses. Considerando uma taxa de juros de 20% am, qual o valor da entrada?
10) Por um equipamento de R$ 360.000,00 paga-se uma entrada de 20% mais dois pagamentos mensais consecutivos. Se o primeiro pagamento for de R$ 180.000,00 e a taxa de juros efetiva aplicada, de 10% am, calcular o valor do segundo pagamento.
11) Um capital de R$ 50.000,00 rendeu R$ 1.000,00 em um determinado prazo. Se o prazo fosse dois meses maior, o rendimento aumentaria em R$ 2.060,40. Calcular a taxa de juros efetiva ao mês ganha pela aplicação e o prazo em meses.
12) Dois capitais foram aplicados durante 2 anos, o primeiro a juros efetivos de 2% am e o segundo, a 1,5 am. O primeiro capital é R$ 10.000,00 maior que o segundo e seu rendimento excedeu em R$ 6.700,00 o rendimento do segundo capital. Calcular o valor de cada um dos capitais.
13) Um certo capital após 4 meses transformou-se em R$ 850,85. Esse capital, diminuído dos juros ganhos nesse prazo, reduz-se a R$ 549,15. Calcular o capital e a taxa de juros efetiva ao mês ganha na aplicação.

Tipos de descontos

Descontos simples são obtidos com cálculos lineares, mas os Descontos compostos são obtidos com cálculos exponenciais.

Desconto Simples Comercial (por fora): O cálculo deste desconto é análogo ao cálculo dos juros simples, substituindo-se o Capital P na fórmula de juros simples pelo Valor Nominal N do título.

Desconto por fora	Juros simples
D = N i n	**j = P i n**
N = Valor Nominal	**P = Principal**
i = taxa de desconto	**i = taxa de juros**
n = no. de períodos	**n = no. de períodos**

O valor atual no desconto por fora, é calculado por:

$$\mathbf{A = N - D = N - N.i.n = N(1 - i.n)}$$

Desconto Simples Racional (por dentro): O cálculo deste desconto funciona análogo ao cálculo dos juros simples, substituindo-se o Capital P na fórmula de juros simples pelo Valor Atual A do título.

O cálculo do desconto racional é feito sobre o Valor Atual do título.

Desconto por dentro	Juros simples
D = A i n	**j = P.i.n**
N = Valor Atual	**P = Principal**
i = taxa de desconto	**i = taxa de juros**
n = no. de períodos	**n = no. de períodos**

O valor atual, no desconto por dentro, é dado por:

$$\mathbf{A = N / (1 + i\, n)}$$

Desconto Comercial composto (por fora): Este tipo de desconto não é usado no Brasil e é análogo ao cálculo dos Juros compostos, substituindo-se o Principal P pelo Valor Nominal N do título.

Desconto composto por fora	Juros compostos
$A = N(1-i)^n$	**$S = P(1+i)^n$**
A = Valor Atual	**P = Principal**
i = taxa de desconto negativa	**i = taxa de juros**
n = no. de períodos	**n = no. de períodos**

Apenas para fins didáticos, iremos obter a fórmula para o cálculo deste desconto. Ela é obtida por aplicações repetidas do desconto simples para 1 período.

Para n=1, o desconto composto por fora funciona como o desconto simples por fora, logo:

$$A_1 = N(1-i)$$

onde A_1 é o valor atual do título com valor nominal N. Para n=2, devemos reaplicar o mesmo processo, substituindo agora N por A_1, para obter A_2, isto é:

$$\mathbf{A_2 = A_1(1-i) = N(1-i)^2}$$

Por este raciocínio, temos que, para cada número natural n:

$$\mathbf{A_n = N(1-i)^n}$$

Esta fórmula é similar à formula do montante composto, dada por:

$$\mathbf{S = P(1+i)^n}$$

Desconto Racional composto (por dentro): Este tipo de desconto é muito utilizado no Brasil.

Como $D = N - A$ e como $N = A(1 + i)^n$, então

$$\mathbf{D = N\text{-}N(1+i)^{-n} = N.[1\text{-}(1+i)^{-n}]}$$

O melhor estudo que se pode fazer com o desconto racional composto é considerar o Valor Atual A como o capital inicial de uma aplicação e o Valor Nominal N como o montante desta aplicação, levando em consideração que as taxas e os tempos funcionam de forma similar nos dois casos.

Exemplos

a) Qual é o desconto racional composto de um título cujo valor nominal é R$10.000,00, se o prazo de vencimento é de n=5 meses e a taxa de desconto é de 3,5% ao mês.

Solução:

$D = 10.000,00 [(1,035)^5 - 1]/1,035^5 = 1.580,30$

b) Uma empresa emprestou um valor que deverá ser pago 1 ano após em um único pagamento de R$ 18.000,00 à taxa de 4,5% ao mês. Cinco meses após ter feito o empréstimo a empresa já tem condições de resgatar o título. Se a empresa tiver um desconto racional composto calculado a uma taxa equivalente à taxa de juros cobrada na operação do empréstimo, qual será o valor líquido a ser pago pela empresa?

Dados: Valor nominal: N=18.000,00; taxa mensal: i=4,5%=0,045

Número de períodos para o desconto: n=12-5=7

Exercícios de DESCONTO SIMPLES

1- Calcular o valor liberado de um título com valor nominal de R$ 120.000,00 e com vencimento para 180 dias descontado comercialmente a uma taxa simples de desconto de 40% aa.

2- Uma promissória de R$ 450,00 foi descontada comercialmente tendo um desconto de R$ 54,00. Considerando uma taxa simples de desconto de 6% am, calcular o prazo da operação.

3- Um borderô de duplicatas no valor de R$ 2.760,00 foi descontado num Banco, a uma taxa bancária de 6,3% am. Sabendo-se que o prazo médio dos títulos são de 35 dias, calcule o valor creditado a empresa.

4- Determine qual foi a taxa mensal comercial cobrada de um cliente, que recebeu a importância de R$ 5.230,40 de um Banco, ao descontar uma duplicata de R$ 5.600,00 pelo prazo de 44 dias.

5- Um título de R$ 2.800,00 foi descontado em um Banco gerando um valor líquido de R$ 2.587,20. Sabendo-se que a taxa "por fora" cobrada foi de 11,4%am, determine por quantos dias foi realizada a operação.

6- Uma nota promissória gerou uma quantia de R$ 4.300,00, tendo sido descontada comercialmente a uma taxa de 5,4%am, faltando 34 dias para o seu vencimento. Calcule o valor nominal da promissória.

7- Uma nota promissória de R$ 1.400,00 foi descontada em um Banco faltando 48 dias para seu vencimento, a uma taxa bancária de 110,4%aa. Determine o valor do desconto.

8- Pelo desconto de 8 títulos que totalizaram R$ 32.000,00, foi creditado na conta do cliente a importância de R$ 30.388,68. Sabendo-se que o prazo médio dos títulos foi de 36,2 dias e que foram cobrados encargos no valor de R$ 105,40, determine a taxa mensal de desconto "por fora" na operação.

Exercícios de DESCONTO RACIONAL

1- Determinar a taxa mensal de desconto racional de um título negociado 60 dias antes de seu vencimento, sendo seu valor de resgate igual a R$ 26.000,00 e valor atual na data do desconto de R$ 24.436,10.

2- Seja um título de valor nominal de R$ 4.000,00 vencível em um ano, que está sendo liquidado 3 meses antes de seu vencimento. Sendo de 42% a.a. a taxa de desconto racional, pede-se calcular o desconto e o valor descontado (atual) desta operação

3- O valor atual de um título é de R$ 159.529,30, sendo o valor de seu desconto racional, apurado a uma taxa de 5,5% a.m., igual a R$ 20.470,70. Determine o número de dias que faltam para o vencimento.

4- Qual o valor máximo que uma pessoa deve pagar por um título de valor nominal de R$ 82.000,00 com vencimento para 110 dias, se deseja ganhar 5% a.m.? (usar desconto racional)

Introdução à amortização

Amortização é um processo de extinção de uma dívida através de pagamentos periódicos, que são realizados em função de um planejamento, de modo que cada prestação corresponde à soma do reembolso do Capital ou do pagamento dos juros do saldo devedor, podendo ser o reembolso de ambos, sendo que

Juros são sempre calculados sobre o saldo devedor!

Os principais sistemas de amortização são:

1. **Sistema de Pagamento único:**

   Um único pagamento no final.

2. **Sistema de Pagamentos variáveis:**

   Vários pagamentos diferenciados.

3. **Sistema Americano:**

   Pagamento no final com juros calculados período a período.

4. **Sistema de Amortização Constante (SAC):**

   A amortização da dívida é constante e igual em cada período.

5. **Sistema Price ou Francês (PRICE):**

   Os pagamentos (prestações) são iguais.

6. **Sistema de Amortização Misto (SAM):**

   Os pagamentos são as médias dos sistemas SAC e Price.

7. **Sistema Alemão:**

   Os juros são pagos antecipadamente com prestações iguais, exceto o primeiro pagamento que corresponde aos juros cobrados no momento da operação.

Em todos os sistemas de amortização, cada pagamento é a soma do valor amortizado com os juros do saldo devedor, isto é:

$$Pagamento = Amortização + Juros$$

Em todas as nossas análises, utilizaremos um financiamento hipotético de R$300.000,00 que será pago ao final de 5 meses à taxa mensal de 4%.

Na sequência, será essencial o uso de tabelas consolidadas com os dados de cada problema e com informações essenciais sobre o sistema de amortização. Em todas as análises, utilizaremos a mesma tabela básica que está indicada abaixo, com os elementos indicados:

Sistema de Amortização				
n	**Juros**	**Amortização do Saldo devedor**	**Pagamento**	**Saldo devedor**
0				**300.000,00**
1				
2				
3				
4				
5				**0**
Totais		**300.000,00**		

Sistema de Pagamento Único

O devedor paga o Montante=Capital + Juros compostos da dívida em um único pagamento ao final de n=5 períodos. O Montante pode ser calculado pela fórmula:

$$\mathbf{M = C\,(1+i)^n}$$

Uso comum: Letras de câmbio, Títulos descontados em bancos, Certificados a prazo fixo com renda final.

Sistema de Pagamento Único				
n	Juros	Amortização do Saldo devedor	Pagamento	Saldo devedor
0	0	0	0	300.000,00
1	12.000,00			312.000,00
2	12.480,00			324.480,00
3	12.979,20			337.459,20
4	13.498,37			350.957,57
5	14.038,30	300.000,00	364.995,87	0
Totais	64.995,87	300.000,00	364.995,87	

Sistema de Pagamentos Variáveis

O devedor paga o periodicamente valores variáveis de acordo com a sua condição e de acordo com a combinação realizada inicialmente, sendo que os juros do Saldo devedor são pagos sempre ao final de cada período.

Uso comum: Cartões de crédito.

Dado: O devedor pagará a dívida da seguinte forma:

- No final do 1o.mês: R$ 30.000,00 + juros
- No final do 2o.mês: R$ 45.000,00 + juros
- No final do 3o.mês: R$ 60.000,00 + juros
- No final do 4o.mês: R$ 75.000,00 + juros
- No final do 5o.mês: R$ 90.000,00 + juros

Sistema de Pagamentos Variáveis				
n	Juros	Amortização do Saldo devedor	Pagamento	Saldo devedor
0	0	0	0	300.000,00
1	12.000,00	30.000,00	42.000,00	270.000,00
2	10.800,00	45.000,00	55.800,00	225.000,00
3	9.000,00	60.000,00	69.000,00	165.000,00
4	6.600,00	75.000,00	81.600,00	90.000,00
5	3.600,00	90.000,00	93.600,00	0
Totais	42.000,00	300.000,00	342.000,00	

Sistema Americano

O devedor paga o Principal em um único pagamento no final e no final de cada período, realiza o pagamento dos juros do Saldo devedor do período. No final dos 5 períodos, o devedor paga também os juros do 5o. período.

Sistema Americano				
n	**Juros**	**Amortização do Saldo devedor**	**Pagamento**	**Saldo devedor**
0	0	0	0	300.000,00
1	12.000,00		12.000,00	300.000,00
2	12.000,00		12.000,00	300.000,00
3	12.000,00		12.000,00	300.000,00
4	12.000,00		12.000,00	300.000,00
5	12.000,00	300.000,00	312.000,00	0
Totais	60.000,00	300.000,00	360.000,00	

Sistema de Amortização Constante (SAC)

O devedor paga o Principal em n=5 pagamentos sendo que as amortizações são sempre constantes e iguais.

Uso comum: Sistema Financeiro da Habitação

Sistema de Amortização Constante (SAC)				
n	**Juros**	**Amortização do Saldo devedor**	**Pagamento**	**Saldo devedor**
0	0	0	0	300.000,00
1	12.000,00	60.000,00	72.000,00	240.000,00
2	9.600,00	60.000,00	69.600,00	180.000,00
3	7.200,00	60.000,00	67.200,00	120.000,00
4	4.800,00	60.000,00	64.800,00	60.000,00
5	2.400,00	60.000,00	62.400,00	0
Totais	36.000,00	300.000,00	336.000,00	

Sistema Price (Sistema Francês)

Todas as prestações (pagamentos) são iguais.

Uso comum: Financiamentos em geral de bens de consumo.

Cálculo: O cálculo da prestação P é o produto do valor financiado V_f=300.000,00 pelo coeficiente K dado pela fórmula

$$K = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

onde i é a taxa ao período e n é o número de períodos. Para esta tabela, o cálculo fornece:

$$P = K \times V_f = 67.388,13$$

Sistema Price (ou Sistema Francês)				
n	Juros	Amortização do Saldo devedor	Pagamento	Saldo devedor
0	0	0	0	300.000,00
1	12.000,00	55.388,13	67.388,13	244.611,87
2	9.784,47	57.603,66	67.388,13	187.008,21
3	7.480,32	59.907,81	67.388,13	127.100,40
4	5.084,01	62.304,12	67.388,13	64.796,28
5	2.591,85	64.796,28	67.388,13	0
Totais	36.940,65	300.000,00	336.940,65	

Sistema de Amortização Misto (SAM)

Cada prestação (pagamento) é a média aritmética das prestações respectivas no Sistemas Price e no Sistema de Amortização Constante (SAC).

Uso: Financiamentos do Sistema Financeiro da Habitação.

Cálculo:

$$P_{SAM} = (P_{Price} + P_{SAC}) \div 2$$

n	P_{SAC}	P_{Price}	P_{SAM}
1	72.000,00	67.388,13	69.694,06
2	69.600,00	67.388,13	68.494,07
3	67.200,00	67.388,13	67.294,07
4	64.800,00	67.388,13	66.094,07
5	62.400,00	67.388,13	64.894,07

Sistema de Amortização Misto (SAM)				
n	Juros	Amortização do Saldo devedor	Pagamento	Saldo devedor
0	0	0	0	300.000,00
1	12.000,00	57.694,06	69.694,06	242.305,94
2	9.692,24	58.801,83	68.494,07	183.504,11
3	7.340,16	59.953,91	67.294,07	123.550,20
4	4.942,01	61.152,06	66.094,17	62.398,14
5	2.495,93	62.398,14	64.894,07	0
Totais	36.470,34	300.000,00	336.470,94	

Sistema Alemão

O sistema Alemão consiste em liquidar uma dívida onde os juros são pagos antecipadamente com prestações iguais, exceto o primeiro pagamento que corresponde aos juros cobrados no momento da operação financeira. É necessário conhecer o valor de cada pagamento P e os valores das amortizações A_k, k=1,2,3,...,n.

Uso comum: Alguns financiamentos.

Fórmulas necessárias: Para k=1,2,...,n.

$P = \dfrac{C\ i}{1-(1-i)^n}$	$A_1 = P(1-i)^{n-1}$	$A_k = \dfrac{A_1}{(1-i)^{k-1}}$

Aprestação mensal do financiamento, pode ser calculada com as fórmulas acima.

$P = (300.000 \times 0,04) \div [1-(1-0,04)^5] = 64.995,80$
$A_1 = 64.995,80 \times (1-0,04)^4 = 55.203,96$
$A_2 = 55.203,96 \div (1-0,04) = 57.504,13$
$A_3 = 57.504,13 \div (1-0,04) = 59.900,13$
$A_4 = 59.900,13 \div (1-0,04) = 62.395,97$
$A_5 = 62.395,97 \div (1-0,04) = 64.995,80$

Sistema Alemão				
n	**Juros**	**Amortização do Saldo devedor**	**Pagamento**	**Saldo devedor**
0	12.000,00	0	12.000,00	300.000,00
1	9.791,84	55.203,96	64.995,80	244.796,04
2	7.491,68	57.504,13	64.995,80	187.291,91
3	5.095,67	59.900,13	64.995,80	127.391,78
4	2.599,83	62.395,97	64.995,80	64.995,80
5		64.995,80	64.995,80	0
Totais	**36.979,02**	**300.000,00**	**336.979,02**	